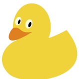
ENS de Lyon — Algèbre 1
L3 — 2024-2025

TD 8 : Formes quadratiques épisode 2

Les exercices marqués d'un  seront corrigés en TD, si le temps le permet.
Sauf mention du contraire, K désigne un corps de caractéristique différente de 2.

Exercices importants



Exercice 1. (Réduction de Gauss et théorème de Sylvester)

On reprend les trois formes quadratiques définies dans l'exercice 1 du TD précédent sur $\mathbb{R}$:

— $q_1(x,y,z) = (x+y)^2 - z^2$, de signature $(1,1)$;

— $q_2(x,y,z) = xy + yz + zx = \frac{1}{4}(x+y+2z)^2 - \frac{1}{4}(x-y)^2 - z^2$, de signature $(1,2)$;

— $q_3(x,y,z,t) = x^2 + y^2 + 2(z^2+t^2) + xz + xt + zt = \left(x + \frac{z+t}{2}\right)^2 + y^2 + \frac{7}{4}\left(z + \frac{t}{7}\right)^2 + \frac{12}{7}t^2$, de signature $(4,0)$;

Déterminer pour chacune d'elle un sous-espace défini positif et défini négatif maximal.

Exercice 2. (Formes quadratiques associées à la trace)

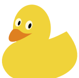
1. Déterminer le rang des formes quadratiques suivantes, et quand $K = \mathbb{R}$ leur signature.

  (a) $q_1(M) = \mathrm{Tr}(M)^2$ sur $M_n(K)$;

  (b) $q_2(M) = \mathrm{Tr}({}^tMM)$ sur $M_n(K)$;

  (c) $q_3(M) = \mathrm{Tr}(M^2)$ sur $M_n(K)$.

2. Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique de signature (r,s). Calculer la signature de $q_4(M) = \mathrm{Tr}({}^tMSM)$ sur $M_n(\mathbb{R})$.



Exercice 3. (Formes quadratiques sur les corps finis)

Soit p un nombre premier différent de 2 et $\mathbb{F}_q$ un corps fini à $q = p^\alpha$ éléments.

1. **(a)** Déterminer le noyau du morphisme $c : \mathbb{F}_q^\times \to \mathbb{F}_q^\times$, définie par $x \mapsto x^2$. En déduire qu'il y a $\frac{q+1}{2}$ carrés dans $\mathbb{F}_q$.

  (b) Montrer que pour $a, b \in \mathbb{F}_q^\times$, l'équation $ax^2 + by^2 = 1$ a toujours une solution dans $\mathbb{F}_q^2$.

Soit $\alpha \in \mathbb{F}_q^\times$ qui n'est pas un carré dans $\mathbb{F}_q$, et soit (E,Q) un $\mathbb{F}_q$-espace vectoriel quadratique.

2. Justifier qu'il existe une base de E telle que la matrice de Q dans cette base est

$$\begin{pmatrix} \alpha I_k & 0 & 0 \\ 0 & I_\ell & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. On suppose $k \geqslant 2$, montrer qu'il existe une base telle que la matrice de Q dans cette base est égale à

$$\begin{pmatrix} \alpha I_{k-2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{\ell+2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. En déduire qu'il existe une unique matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ou} \qquad \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & I_{r-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

telle que Q s'écrit sous cette forme dans une base. Exprimer r en fonction de Q et montrer que les formes quadratiques correspondant à ces deux matrices ne sont pas équivalentes.

Exercice 4. (Formes quadratiques anisotropes réelles et Cauchy-Schwarz)
Soit (E, q) un espace quadratique réel. On note ϕ la forme polaire de q.

1. Montrer que q est anisotrope si et seulement si q est définie positive ou définie négative.

2. On suppose que q est non nulle. Montrer que q est anisotrope si et seulement elle vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall x, y \in E,\ \ \phi(x,y)^2 \leqslant q(x)q(y),$$

avec égalité si et seulement si x et y sont liés.

3. Montrer que $\ker(q) = C(q)$ si et seulement si q est positive ou négative.

Exercice 5. (Décomposition polaire)
On considère l'application

$$p : \left| \begin{array}{ccc} O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \\ (O, S) & \longmapsto & OS \end{array} \right. .$$

On rappelle que p est bijective et continue. On va montrer que l'application p^{-1} est aussi continue (et donc que p est un homéomorphisme).

Soit $(P_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ qui converge vers une matrice inversible P. On note pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(O_k, S_k) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ l'antécédent de P_k par p.

1. Justifier que l'on peut extraire une sous-suite $(O_{\varphi(k)})_k$ convergente. On note O_φ la limite de cette suite.

2. Montrer que $(S_{\varphi(k)})_k$ converge vers une limite $S_\varphi \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

3. En déduire que le couple (O_φ, S_φ) ne dépend pas de l'extraction φ choisie en question 1 et que la suite $(O_k, S_k)_k$ converge.

4. Conclure.

Exercice 6. (Deux conséquences de la décomposition polaire)

1. Grâce à la décomposition polaire, montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact maximal (pour l'inclusion) de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

2. **(a)** Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $M_n(\mathbb{R})$.

(b) En déduire qu'une décomposition similaire existe encore sur $M_n(\mathbb{R})$. Est-elle unique ?

Exercice 7. (Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt et décomposition QR)
Soit (E, q) un $\mathbb{R}$-espace quadratique et on suppose q définie positive. Soient $(b_1, \ldots, b_d)$ une famille de d vecteurs linéairement indépendants de E. On se propose de démontrer qu'il existe une famille de d vecteurs $(b'_1, \ldots, b'_d)$ vérifiant les propriétés suivantes :

P1 La famille $(b'_1, \ldots, b'_d)$ est q-orthonormale.

P2 Pour tout $1 \leqslant k \leqslant d$, on a $\mathrm{Vect}(b'_1, \ldots, b'_k) = \mathrm{Vect}(b_1, \ldots, b_k)$.

C'est-à-dire que l'on cherche à construire famille orthonormale à partir d'une famille libre de vecteurs. On procède par analyse-synthèse. Supposons qu'une famille $(b'_1, \dots, b'_d)$ vérifiant **P1** et **P2** existe.

1. Montrer que $b'_1 = \frac{1}{q(b_1)} b_1$.

2. Soit $i \in [\![2, d]\!]$. On écrit $b'_i = \mu_{i,i} b_i + \sum_{j<i} \mu_{j,i} b'_j$ avec $\mu_{i,j} \in \mathbb{R}$. Montrer que l'on doit avoir pour tout $j \in [\![1, i-1]\!]$, $\mu_{j,i} = -\mu_{i,i} \phi(b_i, b'_j)$.

3. Montrer l'existence d'une famille $(b'_i)_i$ vérifiant **P1** et **P2**.

4. Montrer que si l'on rajoute la condition

P3 Pour tout $i \in [\![1, d]\!]$, $\phi(b_i, b'_i) > 0$.

alors la famille $(b'_i)_i$ est unique.

5. Application : Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. En appliquant l'orthonormalisation de Gram-Schmidt aux colonnes de A, montrer qu'il existe une matrice orthogonale $Q \in O_n(\mathbb{R})$ et une matrice triangulaire supérieure R telle que $A = QR$. Donner l'expression de Q et de R en fonction des vecteurs b_i et b'_i.

Exercice 8. (Une matrice symétrique non diagonalisable)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{C})$. Montrer que A n'est pas diagonalisable.

Exercices supplémentaires

Exercice 9. (Topologie de l'espace des formes quadratiques réelles)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Pour p, $q \in [\![0, n]\!]$ tels que $p + q \leqslant n$, on note $\mathcal{Q}_{p,q}(E)$ l'ensemble des formes quadratiques sur E de signature (p, q).

1. Montrer que $\mathcal{Q}_{n,0}(E)$ et $\mathcal{Q}_{0,n}(E)$ sont ouverts dans $\mathcal{Q}(E)$.

2. Montrer que l'adhérence de $\mathcal{Q}_{p,q}(E)$ contient dans $X := \bigcup_{p' \leqslant p, q' \leqslant q} \mathcal{Q}_{p',q'}(E)$.

3. Montrer que $\mathcal{Q}(E) \setminus X$ est ouvert. (*Indication* : Pour $Q \in \mathcal{Q}(E)$, considérer les applications qui à une forme quadratique de E associe sa restriction au sous-espace maximal défini positif (resp. défini négatif) de Q.)

4. En déduire que X est l'adhérence de $\mathcal{Q}_{p,q}(E)$.

Exercice 10. (Signature et mineurs principaux)

Soit (E, q) un espace quadratique. On suppose que q est non dégénérée.

1. Soit δ le déterminant d'une matrice de q. Soit H un hyperplan de E et $(e_1, \dots, e_{n-1})$ une base de H orthogonale pour q. Montrer qu'il existe $e_n \in E$ tel que $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E et tel que la matrice de q dans la base $\mathbf{e}$ soit diagonale de déterminant δ.

2. Pour une matrice $A \in M_n(K)$ et $i \in [\![1, n]\!]$, on note Δ_i le i-ième mineur principal de A, c'est-à-dire le déterminant de la matrice $(A_{k,\ell})_{k,\ell \in [\![1,i]\!]}$.

Soit $S \in S_n(K)$ la matrice de q dans une base de E. On suppose que tous les mineurs principaux de S sont non nuls. Montrer qu'il existe une base de E telle que la matrice de q dans cette base soit diagonale égale à

$$\operatorname{diag}\left(\Delta_1(S), \frac{\Delta_2(S)}{\Delta_1(S)}, \dots, \frac{\Delta_n(S)}{\Delta_{n-1}(S)}\right).$$

3. On garde les notations et les hypothèses de la question précédente. On suppose que $K = \mathbb{R}$. Montrer que la signature de q est égal à $(n-s, s)$ où s est le nombre de changement de signes dans la suite $(1, \Delta_1(S), \Delta_2(S), \dots, \Delta_n(S))$.

Exercice 11.

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, et soit $q : E \to \mathbb{C}$ une forme quadratique.

Montrer que $\mathrm{Re}(q) : x \mapsto \mathrm{Re}(q(x))$ est une forme quadratique sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E et donner sa signature en fonction du rang de q.

Exercice 12. (Loi de réciprocité quadratique)

Soit p un nombre premier impair. On définit le *symbole de Legendre* $\left(\frac{\cdot}{p}\right) : \mathbb{Z} \to \{-1, 0, 1\}$ par

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \mid a \\ 1 & \text{si } p \nmid a \text{ et } a \text{ est un carré modulo } p \\ -1 & \text{si } p \nmid a \text{ et } a \text{ n'est pas un carré modulo } p \end{cases}$$

On a de plus $\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}}\ [p]$.

On veut démontrer dans cet exercice la loi de *réciprocité quadratique* : pour tous nombres premiers impairs distincts p, q, on a

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}.$$

On note $X = \{(x_1, ..., x_p) \in \mathbb{F}_q^p \mid \sum_{i=1}^{p} x_i^2 = 1\}$. On va calculer son cardinal de deux manières différentes.

1. On fait agir $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur X par $k \cdot (x_1, ..., x_p) = (x_{k+1}, ..., x_{k+p})$.

(a) Que dire sur les orbites de l'action ?

(b) En utilisant la formule des classes, démontrer que $|X| \equiv 1 + \left(\frac{p}{q}\right)\ [p]$.

2. On note f la forme quadratique de $\mathbb{F}_q^p$ définie par :

$$f(x_1, ..., x_p) = x_1^2 + ... + x_p^2.$$

On note $d := \frac{p-1}{2}$, et g la forme quadratique de $\mathbb{F}_q^p$ définie par :

$$g(y_1, z_1, ..., y_d, z_d, t) = 2\sum_{i=1}^{d} y_i z_i + (-1)^d t^2.$$

(a) À l'aide de l'exercice 3, montrer que f et g sont congruentes. En déduire que $|X| = |X'|$, où

$$X' = \{(y_1, z_1, ..., y_d, z_d, t) \in \mathbb{F}_q^p \mid 2\sum_{i=1}^{d} y_i z_i + (-1)^d t^2 = 1\}.$$

On va à présent compter les éléments de X'.

(b) Combien y a-t-il d'éléments de X' tels que tous les y_i sont nuls ?

(c) Combien y a-t-il d'éléments de X' tels qu'au moins un des y_i est non nul ?

3. Conclure en démontrant la loi de réciprocité quadratique.

Exercice 13. (Sous-espaces totalement isotropes : le retour)

On reprend les notations de l'exercice 11 du TD précédent. Soit q une forme quadratique réelle non dégénérée de signature (s, t). Démontrer que la dimension d'un SETIM est $\min(s, t)$.